Lösung

Lösung zu Teilaufgabe 1 (6 BE)

Es soll überprüft werden, ob die vier Punkte M, B, F und S in einer Ebene liegen. Da drei Punkte immer in einer Ebene liegen, wird zunächst die Gleichung einer Ebene aufgestellt, die drei der angegebenen Punkte enthält. Es ist dabei nicht wichtig, welche drei Punkte ausgewählt werden. Für die Punkte M, B und F und M als Aufhängepunkt ergibt sich die Ebene

$$E_{\mathrm{MBF}}: \quad \vec{X} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{MF}}$$

$$E_{\mathrm{MBF}}: \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 30 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1\,400 \\ 1\,200 \\ 230 \end{pmatrix}.$$

Merke:

Beim Lösen von überbestimmten Gleichungssystemen werden immer zunächst so viele Gleichungen betrachtet, wie Variablen vorhanden sind und dieses Untergleichungssystem gelöst (z.B. mit dem Taschenrechner). Danach die Lösungen in alle verbliebenen Gleichungen einsetzen und überprüfen.

Nun wird überprüft, ob auch der vierte Punkt S in dieser von M, B und F aufgespannten Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix} 800 \\ 400 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 30 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1400 \\ 1\,200 \\ 230 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Gleichung (1) führt auf das folgende überbestimmte Gleichungssystem (ein Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten):

$$800 = 200r + 1\,400s \tag{2}$$
$$400 = 500r + 1\,200s \tag{3}$$
$$130 = 30r + 230s \tag{4}$$

Das Gleichungssystem wird zunächst nur für zwei der drei Gleichungen gelöst. Beispielsweise ergibt sich aus den Gleichungen (2) und (3):

$$r = \frac{20}{23}; \qquad s = -\frac{16}{23}$$

Um zu entscheiden, ob das Gleichungssystem eine Lösung hat ($\rightarrow$ der Punkt liegt in der Ebene) oder nicht ($\rightarrow$ der Punkt liegt nicht in der Ebene), wird diese Lösung nun mit Hilfe der dritten Gleichung, hier Gleichung (4), überprüft:

$$30 \cdot \frac{20}{23} + 230 \cdot \left(-\frac{16}{23}\right) = -\frac{3\,080}{23} \neq 130 \quad ↯$$

Das Gleichungssystem hat also keine Lösung, die Punkte M, B, F und S liegen daher nicht in einer Ebene.

Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Um die Einnahmen durch den Verkauf von einzelnen Metern der Lauflänge des längsten Laserstrahls zu ermitteln, muss zunächst der längste Laserstrahl gefunden werden. Hierfür wird die zurückgelegte Strecke der einzelnen Strahlen mit Hilfe des Betrags der einzelnen Vektoren bestimmt:

Betrag eines Vektors $\vec{a}$:

$$\left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 30 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{200^2 + 500^2 + 30^2} \approx 539{,}35$$

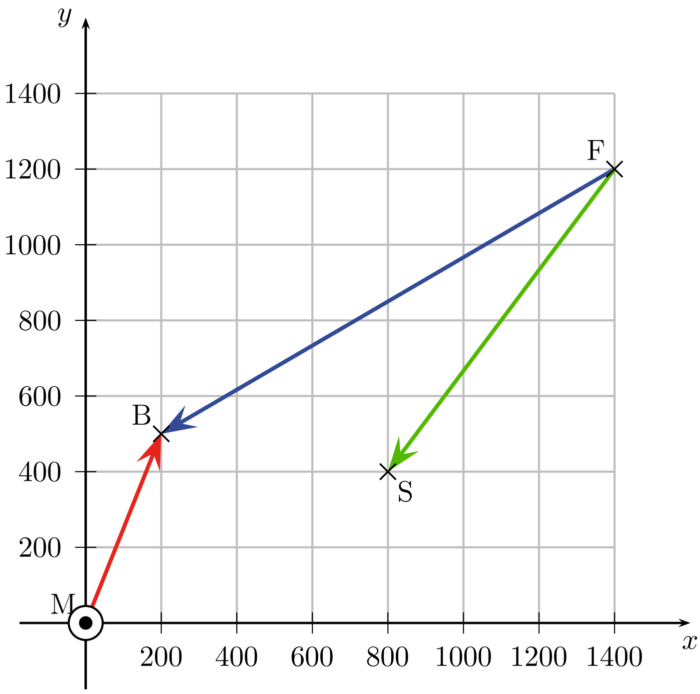
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{FS}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -600 \\ -800 \\ -100 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-600)^2 + (-800)^2 + (-100)^2} \approx 1\,004{,}99$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{FB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1\,200 \\ -700 \\ -200 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1\,200)^2 + (-700)^2 + (-200)^2} \approx 1\,403{,}57$$

Den längsten Weg legt das Licht also auf der Strecke von Punkt F zu Punkt B zurück. Bei 10 € Einnahmen pro zurück gelegtem vollem Meter kann die Stadt mit Einnahmen in Höhe von 14 030 € rechnen.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Hier soll ein Grundriss der Stadt im Maßstab 1 : 20 000 gezeichnet werden. Zunächst bedeutet „Maßstab 1 : 20 000“, dass 1 cm auf dem Blatt 20 000 cm, also 200 m, in der Realität entsprechen. Außerdem ist in der Aufgabenstellung schon angegeben, dass die Grundfläche der Stadt in der xy-Ebene liegen soll, das Höhenprofil in z-Richtung zeigt senkrecht aus der Blattebene heraus in Richtung des Betrachters. Die angegebenen Punkte werden also in Draufsicht eingezeichnet:



Dieser Grundriss der Stadt reicht nicht aus, um die Wege zu ermitteln, die die einzelnen Laserstrahlen zurücklegen, da die überwundenen Höhendifferenzen nicht berücksichtigt werden und der gezeichnete Verlauf lediglich einer Projektion der Geraden im Raum in die xy-Ebene entspricht.

Lösung zu Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Der blaue Laser ist in F positioniert und soll nun so schnell von B zu S geschwenkt werden, dass der Betrachter den Strahl als Teil einer Ebene wahrnimmt. Die Gleichung dieser Ebene, die die Punkte F, B und S enthält, soll hier sowohl in Koordinaten- als auch in Parameterform angegeben werden.
Mit F als Aufhängepunkt ergibt sich für die Ebene in Parameterform:

$$\mathrm{E_{FBS}}: \quad \vec{X} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{FB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{FS}}$$

$$\mathrm{E_{FBS}}: \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 1\,400 \\ 1\,200 \\ 230 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1\,200 \\ -700 \\ -200 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -600 \\ -800 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Darstellung einer Ebene $\mathrm{E_{ABC}}$ in

- Parameterform
  $\vec{X} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$
- Koordinatenform
  $\vec{X} \circ \vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \circ \vec{n}$
- Normalenform
  $\left(\vec{X} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \circ \vec{n} = 0$

Um diese Gleichung in Koordinatenform umzuformen, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Elimination der Parameter:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I}: & x & = & 1400 - 1\,200r - 600s \\
\text{II}: & y & = & 1\,200 - 700r - 800s \\
\text{III}: & z & = & 230 - 200r - 100s \\
\hline
\text{IV} = 4\cdot\text{I} - 3\cdot\text{II}: & 4x - 3y & = & 2\,000 - 2\,700r \\
\text{V} = \text{II} - 8\cdot\text{III}: & y - 8z & = & -640 + 900r \\
\hline
\text{VI} = \text{IV} + 3\cdot\text{V}: & 4x - 24z & = & 80 \\
\hline
{}^{1}/_{4}\cdot\text{VI}: & x - 6z & = & 20
\end{array}$$

2. Anwenden des Zusammenhangs $\vec{X} \circ \vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \circ \vec{n}$ mit $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$: Stützvektor der Ebene und $\vec{n}$: Normalenvektor der Ebene:

   - Berechnung eines Normalenvektors der Ebene mit Hilfe des Skalarproduktes ($\vec{n}$ steht senkrecht auf den Richtungsvektoren der Ebene, also müssen die beiden Skalarprodukte Null ergeben):

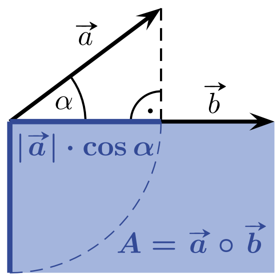
$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1\,200 \\ -700 \\ -200 \end{pmatrix} = 0 \quad \Big\} \; -1\,200n_1 - 700n_2 - 200n_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -600 \\ -800 \\ -100 \end{pmatrix} = 0 \quad \Big\} \; -600n_1 - 800n_2 - 100n_3 = 0$$

Es ergibt sich ein (unterbestimmtes) Gleichungssystem aus zwei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I}: & 0 & = & -1200n_1 - 700n_2 - 200n_3 \\
\text{II}: & 0 & = & -600n_1 - 800n_2 - 100n_3 \\
\hline
\text{III} = \text{I} - 2\cdot\text{II}: & 0 & = & 900n_2
\end{array}$$

Der Wert des Skalarproduktes ist auch ein Maß für den Winkel, den die Vektoren miteinander einschließen:



$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Für $\alpha = 90°$ ist daher wegen $\cos(90°) = 0$ auch $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

Aus Gleichung III folgt direkt, dass $n_2 = 0$ gilt. Damit bleibt zwischen n_1 und n_3 der Zusammenhang $-6n_1 - n_3 = 0$ (Einsetzen von n_3 entweder in Gleichung I oder in Gleichung II).

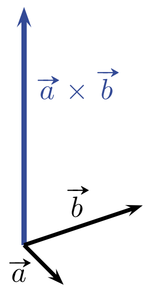
Da der Normalenvektor einer Ebene lediglich in seiner Richtung, nicht aber in seiner Länge bestimmt ist, bleibt an dieser Stelle immer eine Gleichung mit zwei Unbekannten (ein fester Wert für die n_i ergibt eine definierte Länge des Vektors, das Verhältnis zueinander die Richtung). Man wählt dann einen Wert frei und bestimmt entsprechend den zweiten. Wird hier beispielsweise $n_1 = 1$ gewählt, folgt $n_3 = -6$ und es ergibt sich als möglicher Normalenvektor der Ebene E_{FBS}:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- Berechnung eines Normalenvektors mit Hilfe des Kreuzproduktes der Richtungsvektoren der Ebene:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{pmatrix} -1\,200 \\ -700 \\ -200 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -600 \\ -800 \\ -100 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -700 \cdot (-100) & - & (-200) \cdot (-800) \\ -200 \cdot (-600) & - & (-1200) \cdot (-100) \\ -1\,200 \cdot (-800) & - & (-700) \cdot (-600) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 70\,000 & - & 160\,000 \\ 120\,000 & - & 120\,000 \\ 960\,000 & - & 420\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -90\,000 \\ 0 \\ 540\,000 \end{pmatrix} = -90\,000 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Vektormultiplikation ist ein Vektor, der senkrecht auf den beiden Ausgangsvektoren steht.



Damit ergibt sich als (mögliche) Koordinatenform der Ebene E_{FBS}:

$$\vec{X} \circ \vec{n} = \overrightarrow{OA} \circ \vec{n}$$

$$\vec{X} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,400 \\ 1\,200 \\ 230 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$x - 6z = 20$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Hier soll der Winkel berechnet werden, den der blaue Laserstrahl überstreicht, wenn er zum Schloss als Ziel umschwenkt. Mit Hilfe des Skalarproduktes kann der Winkel bestimmt werden, den $\overrightarrow{FB}$ und $\overrightarrow{FS}$ bei F einschließen:

Soll das Ergebnis von

$$\alpha = \arccos(c)$$

in Grad angegeben werden, muss der Taschenrechner auf DEG stehen.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\alpha)$$

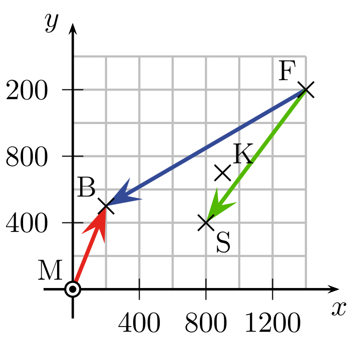
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1\,200 \\ -700 \\ -200 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -600 \\ -800 \\ -100 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1\,200 \\ -700 \\ -200 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -600 \\ -800 \\ -100 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\approx \frac{720\,000 + 560\,000 + 20\,000}{1\,005 \cdot 1\,403{,}5} \approx 0{,}9216$$

$$\alpha \approx 22{,}8^\circ$$

Der blaue Laser überstreicht also einen Winkel von etwa 23°, wenn durch Drehen das Ziel geändert wird.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3 (5 BE)



Abschließend soll untersucht werden, ob der in $(900 \mid 700 \mid 90)$ befindliche Kirchturm mit einer Höhe von 50 m ein ungehindertes Ausbreiten des Laserstrahls während der Drehung verhindert.
Aus der (nicht maßstabsgetreuen!) Skizze an der Seite wird deutlich, dass sich der Kirchturm in dem Bereich befindet, den der blaue Laser überstreicht. Es muss daher im Folgenden überprüft werden, ob der Laserstrahl oberhalb des Kirchturmes vorbei läuft oder ob er den Turm trifft. Hierfür wird die Höhe bestimmt, auf der der Laser die Stelle $(900 \mid 700)$ im Grundriss passiert. Diese Höhe entspricht der z-Koordinate eines Punktes der Ebene E_{FBS} für $x = 900$ und $y = 700$. Aus der Koordinatenform der Ebene ergibt sich:

$$900 - 6z = 20 \quad \Rightarrow \quad z \approx 146{,}7$$

Der Laserstrahl passiert die Position des Kirchturmes also auf einer Höhe von etwa 147 m. Der Turm selbst beginnt auf einer Höhe von 90 m und ist 50 m hoch, endet also auf einer Höhe von 140 m. Damit wird der Strahlengang des Lasers durch den Kirchturm nicht behindert.